

УДК 681.5:51-74

Обухов А. Н., Разживин А. В.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПАРАМЕТРОВ ВОССТАНОВИТЕЛЬНОГО ПЕРИОДА ПЛАВКИ МЕТАЛЛА В ДСП

Металлургическая отрасль играет важную роль в формировании экономики Украины. В условиях постоянного повышения стоимости энергоресурсов, усиления требований к качеству металлургической продукции и экологической безопасности производства существует необходимость внедрения новых технологий плавки металла. Проведение восстановительного периода плавки в технологических комплексах «Печь-Ковш» с дуговым подогревом обеспечивает высокую степень расплава, позволяет внедрить полную механизацию и комплексную автоматизацию процесса, сокращает цикл металлургического производства. Тепловой режим восстановительного периода плавки является одним из основных параметров технологического процесса, т. к. в данный период закладываются основные физико-химические свойства металла. Стабилизация теплового режима на уровне ± 10 °С является обязательным условием получения качественной продукции. Следовательно, необходима система управления температурным режимом плавки, которая будет поддерживать установленный директивный температурный график.

В связи со сложностью измерений показателей теплового состояния расплава возникает необходимость в разработке математических моделей, которые достаточно полно описывают тепловые процессы при электродуговой плавке металла. Такие математические модели основываются на нелинейных дифференциальных уравнениях в частных производных, содержат граничные условия различного рода, а также условия для определения положения границы фазового перехода.

Рассматривая технологический процесс электротермической обработки металла в восстановительный период плавки и конструктивные особенности дуговых сталеплавильных печей (ДСП) и технологических комплексов «Печь-Ковш», можно представить дуговую печь двумя взаимодействующими между собой подсистемами [1]:

- 1) электрическая дуга, непосредственно преобразующая электрическую энергию в подводимую к металлу теплоту и характеризующаяся мощностью P_d ;
- 2) печь, в которой происходят процессы преобразования жидкого металла в сталь заданного качества и характеризующаяся мощностью тепловых потерь P_{mn} .

Анализ интегральных показателей энергетических процессов в дуговой сталеплавильной печи, учет их пространственного распределения может быть сделан путем решения дифференциальных уравнений в частных производных. Такое решение позволяет описать тепловые процессы, распределенные во времени и пространстве [1, 2].

Целью данной работы является получение теоретических поверхностей изменения температуры в процессе нагрева расплава в технологическом комплексе «Печь-Ковш».

Используя уравнения теплового баланса и пренебрегая тепловым потоком, выделяемым в расплаве (жидком металле) за счет химических реакций, можно записать:

$$c_m \cdot M_m \cdot \frac{\partial T_m}{\partial \tau} = c_{ш} \cdot M_{ш} \cdot \frac{\partial T_{ш}}{\partial \tau} + \lambda_3 \frac{P_d(\tau) - P_{mn}(\tau)}{\pi^2}, \quad (1)$$

где C_m , $C_{ш}$ – удельные теплоемкости жидкого металла и шлака, соответственно; M_m , $M_{ш}$ – массы жидкого металла и шлака, соответственно.

В уравнение (1) входит величина тепловых потерь $P_{mn}(\tau)$, которая состоит из сравнительно небольших постоянных потерь через футеровку и охлаждающую воду и значительных

потерь переменного характера, связанных с отходящими газами [1, 3]. Большую роль в теплообмене рабочего пространства печи играет шлак, так как по мере нагрева шлак аккумулирует тепло металлу. При этом шлак быстрее реагирует на изменение мощности, чем ванна жидкого металла.

Анализ уравнения (1) показывает, что изменение температуры участвующих в теплообмене тел зависит от величины теплового потока, воздействующего на расплав в результате дугового подогрева:

$$Q^*(t) = \lambda_3 \frac{P_d(\tau) - P_{mn}(\tau)}{\pi r_3^2}. \quad (2)$$

При описании тепловых процессов, происходящих в электротермических установках (ДСП и комплексах «Печь – Ковш»), используют краевую задачу нестационарного теплообмена и моделирование трехмерного нестационарного распределения температуры в жидкой стали на основе интегрально-дифференциальных уравнений теплопроводности (уравнения Фурье) [2, 3].

Опишем процесс теплообмена в дуговой печи системой дифференциальных уравнений теплопроводности в частных производных:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{ш}}{\partial t} = a_1 \left(\frac{\partial^2 T_{ш}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{ш}}{\partial r} \right) + \delta(r - r_1) Q^*; \\ \frac{\partial T_{м}}{\partial t} = a_2 \left(\frac{\partial^2 T_{м}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{м}}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_{м}}{\partial x^2} \right) + \delta(x) [F(r, t)], \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{ш}}{\partial t} = a_1 \left(\frac{\partial^2 T_{ш}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{ш}}{\partial r} \right) + \delta(r - r_1) Q^*; \\ \frac{\partial T_{м}}{\partial t} = a_2 \left(\frac{\partial^2 T_{м}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{м}}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_{м}}{\partial x^2} \right) + \delta(x) [F(r, t)], \end{array} \right. \quad (4)$$

где $\delta(r - r_1)$, $\delta(x)$ – дельта функции по соответствующим координатам распространения тепла от электрической дуги; $F(r, t) = \delta(r - r_1) Q^* + Q_1 [T_{ш}^*(r, t)]$ – параметр, характеризующий мощность источника тепла, передаваемого расплаву; $a_2 = 1/c_m M_m$, $a_1 = 1/c_{ш} M_{ш}$ – тепловые передаточные коэффициенты металла и шлака, соответственно; C_m , $C_{ш}$ – удельная теплоемкость металла и шлака; M_m , $M_{ш}$ – масса металла и футеровки.

В уравнениях (3–4) приняты следующие допущения: о усреднении температуры расплава под действием электромагнитного перемешивания, цилиндрической форме печи и равномерном распределении мощности в фазах короткой сети. Такое предположение позволяет утверждать об усреднении температуры металла по слоям и равномерном ее распределении по всей длине ковша.

Уравнение (3) описывает теплопроводность в шлаке при наличии внутреннего источника тепла мощностью Q^* , излучаемой электрической дугой горящей непосредственно в шлаке. Уравнение (4) описывает теплопроводность (изменение температуры) в расплаве в процессе нагрева до температуры выдержки. Нагрев расплава происходит путем непосредственного нагрева от электрических дуг и конвекционного теплообмена на поверхности шлак–расплав и описывается мощностью источника тепла, входящим непосредственно в уравнение $F(r, t)$. На краях расплава происходит конвекционный теплообмен с водоохлаждаемой футеровкой, температура которой измеряется встроенными термопарами.

Запишем начальные условия для уравнений (3) и (4):

$$T_{ш}(r, 0) = T_m(x, r, 0) = T_0, \quad (5)$$

где T_0 – начальная температура расплава и шлака.

При решении уравнений (3) введем допущения, что шлак является теплоизолированным по поверхности шлак-расплав, теплоотдача проходит только по поверхности радиусом R , а теплообмен между шлаком и расплавом учтем при решении уравнения (4).

Граничные условия для уравнения (3):

$$T_{uu}(0,t) < \infty; \quad \frac{\partial T_{uu}}{\partial r} = -\alpha_1 T_{uu}|_{r=R}. \quad (6)$$

Граничные условия для уравнения (4):

$$T_M(0,x,t) < \infty; \quad \frac{\partial T_M}{\partial x} = -\alpha_3 T_M|_{x=l}; \quad \frac{\partial T_M}{\partial r} = -\alpha_2 T_M|_{r=R}; \quad \frac{\partial T_M}{\partial x} = \frac{\partial T_{uu}}{\partial x}|_{x=0}. \quad (7)$$

Рассмотрим решение уравнения (3) с начальными (5) и граничными (6) условиями. Будем искать решение уравнения в виде:

$$T_{uu}(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right), \quad (8)$$

где μ_n – корни характеристического уравнения: $\alpha_1 R J_0(\mu_n) + \mu_n J_0'(\mu_n) = 0$; $J_0(z)$ – функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка, причем $J_0'(z) = -J_1(z)$, т. к. $T_1(0,t) < \infty$.

Запишем разложение $\delta(r - r_1) Q^*$ в ряд по функциям Бесселя:

$$\delta(r - r_1) Q^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu_n^2 Q^* r_1 J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r_1\right)}{R^2 [\mu_n^2 + (\alpha_1 R)^2] J_0^2(\mu_n)} J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right). \quad (9)$$

Тогда учитывая, что $\int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) dr = \frac{R^2}{\mu_n^2} \mu_n J_1(\mu_n)$, получаем:

$$T_0 = 2T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 J_1(\mu_n)}{[\mu_n^2 + (\alpha_1 R)^2] J_0^2(\mu_n)} J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right). \quad (10)$$

Подставляя выражения (9) и (10) в (3), получим дифференциальные уравнения для функций $Q_n(t)$:

$$\dot{Q}_n + \left(\frac{a_1 \mu_n}{R}\right)^2 Q_n = 2Q^* \frac{\mu_n^2 r_1 J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r_1\right)}{R^2 [\mu_n^2 + (\alpha_1 R)^2] J_0^2(\mu_n)} J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (11)$$

с начальными условиями: $Q_0 = 2T_0 \frac{\mu_n^2 J_1(\mu_n)}{[\mu_n^2 + (\alpha_1 R)^2] J_0^2(\mu_n)}$.

Общее решение запишется:

$$Q_n(t) = C_n e^{-\left(\frac{a_1 \mu_n}{R}\right)^2 t} + \frac{2Q^* r_1}{a_1^2} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r_1\right)}{[\mu_n^2 + (\alpha_1 R)^2] J_0^2(\mu_n)}. \quad (12)$$

Решая относительно начальных условий, находим:

$$C_n = 2T_0 \frac{\mu_n^2 J_1(\mu_n)}{[\mu_n^2 + (\alpha_1 R)^2] J_0^2(\mu_n)} - \frac{2Q^* r_1}{a_1^2} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r_1\right)}{[\mu_n^2 + (\alpha_1 R)^2] J_0^2(\mu_n)}. \quad (13)$$

Тогда аналитическое решение распределения температурного поля в шлаке с учетом (11) и (13) примет окончательный вид:

$$T_{ш}(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2T_0 \frac{\mu_n^2 J_1(\mu_n)}{[\mu_n^2 + (\alpha_1 R)^2] J_0^2(\mu_n)} e^{-\left(\frac{\alpha_1 \mu_n}{R}\right)^2 t} + \frac{2Q^* r_1}{a_1^2} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r_1\right)}{[\mu_n^2 + (\alpha_1 R)^2] J_0^2(\mu_n)} \left(1 - e^{-\left(\frac{\alpha_1 \mu_n}{R}\right)^2 t}\right) J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right). \quad (14)$$

Перейдем к определению температурного поля в расплаве. Решение уравнения (4) будем искать в виде:

$$T_M(x, r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r, t) X_k(x). \quad (15)$$

Здесь $X_k(x)$ – решение задачи Штурма-Лиувилля:

$$X_k'' - \lambda_k^2 X_k(x) = 0, \quad \begin{cases} X_k'(0) = 0; \\ X_k'(h) = -\alpha_3 X_k(l). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_k(x) = C_1 \cos \lambda_k x + C_2 \sin \lambda_k x; \\ X_k'(x) = -\lambda_k C_1 \sin \lambda_k x + \lambda_k C_2 \cos \lambda_k x. \end{cases} \quad (16)$$

Из краевых условий определим постоянные интегрирования:

$$\begin{cases} C_2 = 0; \\ C_1(\lambda_k \sin \lambda_k h) = -\alpha_3 \cos \lambda_k h, \end{cases} \quad (17)$$

Отсюда находим: $\operatorname{tg} \lambda_k h = \frac{\alpha_3}{\lambda_k}$. Пусть $p_k = \lambda_k h$. Тогда:

$$\lambda_k = \frac{p_k}{h}, \quad (18)$$

где $\operatorname{tg} p_k = \frac{\alpha_3 h}{\lambda_k}$; $X_k(x) = C_1 \cos \frac{p_k}{h} x$ – собственные функции по переменной x .

Уравнение (15) примет вид:

$$T_M(x, r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r, t) \cos \frac{p_k}{h} x. \quad (19)$$

Найдем для $\delta(x)$ разложения в ряд Фурье по $X_k(x)$:

$$\delta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k(0)}{\|X_k\|^2} = \frac{4}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{2p_k + \sin 2p_k} \cos \frac{p_k}{h} x, \tag{20}$$

где $X_k(0) = 1$; $\|X_k\| = \int_0^h \cos^2 \frac{p_k}{h} dx = \frac{1}{2} \int_0^h (1 + \cos^2 \frac{p_k}{h} x) dx = \frac{h}{2} (1 + \frac{\sin^2 p_k}{2p_k})$.

Тогда:

$$\delta(x)F(r,t) = \frac{4F(r,t)}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{2p_k + \sin 2p_k} \cos \frac{p_k}{h} x. \tag{21}$$

С учетом выражений (19) и (21) дифференциальное уравнение (4), при граничных условиях (5) и начальных условиях (7) примет вид:

$$\frac{\partial R_k}{\partial t} = a_2^2 \left(\frac{\partial^2 R_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_k}{\partial r} - \left(\frac{p_k}{h} \right)^2 R_k \right) + \frac{4F(r,t)}{h} \frac{p_k}{2p_k + \sin 2p_k}, \quad \kappa = 1, 2, 3, \dots, \tag{22}$$

С граничными условиями $R_k(0,t) < \infty$, $\frac{\partial R_k}{\partial r} = -\alpha_2 R_k|_{r=R}$ и начальным условием:

$T_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2T_0}{p_k} \frac{\alpha_3 h \sin p_k}{[\alpha_3 h + \sin^2 p_k]} \cos \frac{p_k}{h} x$. Тогда:

$$R_k(r,0) = 2T_0 \frac{\alpha_3 h \sin p_k}{p_k [\alpha_3 h + \sin^2 p_k]}. \tag{23}$$

Перепишем уравнение (22) для $R_k(r,t)$:

$$\frac{\partial R_k}{\partial t} = a_2^2 \left(\frac{\partial^2 R_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_k}{\partial r} - \left(\frac{p_k}{h} \right)^2 R_k \right) + 2\alpha_3 F(r,t) \frac{\alpha_3 h \sin p_k}{[\alpha_3 h + \sin^2 p_k]}, \tag{24}$$

с граничными условиями $R_k(0,t)|_{r=0} < \infty$, и начальными условиями $\frac{\partial R_k}{\partial r} = -\alpha_2 R_k|_{r=R}$.

Решение уравнения (24) будем искать в следующем виде:

$$R_k(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_{ki}(t) J_0 \left(\frac{\chi_i}{R} r \right). \tag{25}$$

где χ_i – корни характеристического уравнения $R\alpha_2 J_0(\chi_i) + \chi_i J_0'(\chi_i) = 0$.

Запишем разложение $F(r,t)$ в ряд Фурье по $J_0 \left(\frac{\chi_i}{R} r \right)$:

$$F(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\chi_i^2}{R^2 (\chi_i^2 + (\alpha_2 R)^2) J_0^2(\chi_i)} \int_0^R r F(r,t) J_0 \left(\frac{\chi_i}{R} r \right) dr J_0 \left(\frac{\chi_i}{R} r \right), \tag{26}$$

Представим $R_k(r,0)$ в виде:

$$R_k(r,0) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_{ki} J_0\left(\frac{\chi_i}{R} r\right), \quad (27)$$

где $Q_{ki}(0) = 2T_0 \frac{\alpha_3 h \sin p_k}{p_k [\alpha_3 h + \sin^2 p_k]} \left[\frac{2\chi_i^2 J_1(\chi_i)}{(\chi_i^2 + (\alpha_2 R)^2) J_0^2(\chi_i)} \right]$.

Подставляя выражение (25), (26) в дифференциальное уравнение (24), получим:

$$\dot{Q}_{ki} + \left[a_2^2 \left(\left(\frac{\chi_i}{R} \right)^2 + \left(\frac{p_k}{h} \right)^2 \right) \right] Q_{ki} = \frac{2\alpha_3}{\alpha_3 h + \sin^2 p_k} p_i(t), \quad (28)$$

Найдем решение (28), удовлетворяющее начальному условию. Общее решение уравнения имеет вид:

$$Q_{ki}(t) = C_{ki} e^{-a_{ki}t} + \frac{2\alpha_3}{\alpha_3 h + \sin^2 p_k} e^{-a_{ki}t} \int_0^t p_i(\tau) e^{a_{ki}\tau} d\tau. \quad (29)$$

Используя начальные условия, получим:

$$C_{ki} = 4T_0 \frac{\alpha_3 h \sin p_k}{p_k [\alpha_3 h + \sin^2 p_k]} \cdot \left[\frac{\chi_i J_1(\chi_i)}{(\chi_i^2 + (\alpha_2 R)^2) J_0^2(\chi_i)} \right]. \quad (30)$$

Тогда:

$$R_k(r,0) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_{ki}(t) J_0\left(\frac{\chi_i}{R} r\right), \quad (31)$$

где:

$$Q_{ki}(t) = 4T_0 \frac{\alpha_3 h \sin p_k}{p_k [\alpha_3 h + \sin^2 p_k]} \cdot \frac{\chi_i J_1(\chi_i)}{(\chi_i^2 + (\alpha_2 R)^2) J_0^2(\chi_i)} e^{-a_{ki}t} + \frac{2\alpha_3}{\alpha_3 h + \sin^2 p_k} e^{-a_{ki}t} \int_0^t p_i(\tau) e^{a_{ki}\tau} d\tau; \quad (32)$$

$$p_i(t) = \frac{2\chi_i^2}{(\chi_i^2 + (\alpha_2 R)^2) J_0^2(\chi_i)} \int_0^R r F(r,t) J_0\left(\frac{\chi_i}{R} r\right) dr. \quad (33)$$

Окончательно температурное поле в расплаве записывается в виде:

$$T_M(x, r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} Q_{ki}(t) J_0\left(\frac{\chi_i}{R} r\right) \right) \cos \frac{p_k}{h} x. \quad (34)$$

Полученные динамические модели (14) и (34) являются нелинейными, и отражают специфическую реакцию многих электротермических установок. Специфическая реакция проявляется в наличии двух составляющих, одна из которых соответствует относительно быстрой реакции поверхностных слоев (шлака), а вторая – более медленному распределению

тепла в жидком металле. Модель позволяет исследовать изменение температуры расплава в зависимости от величины мощности на дуге, массы металла M_m и массы шлака $M_{ш}$ в печи. Входными параметрами модели являются удельные теплоемкости шлака и расплава, а также подводимая мощность, выходным параметром – температура.

По результатам теоретических исследований процесса теплообмена в замкнутом пространстве печи получены поверхности изменения температуры в процессе нагрева расплава. При решении системы уравнений использован МПП MatLab и встроенная функция PDE. В процессе моделирования приняты следующие параметры: $M_m = 72$ тонны, $M_{ш} = 2$ тонны, $C_m = 0,263$ Дж/°С·кг. [4]. Результаты моделирования приведены на рис. 1.

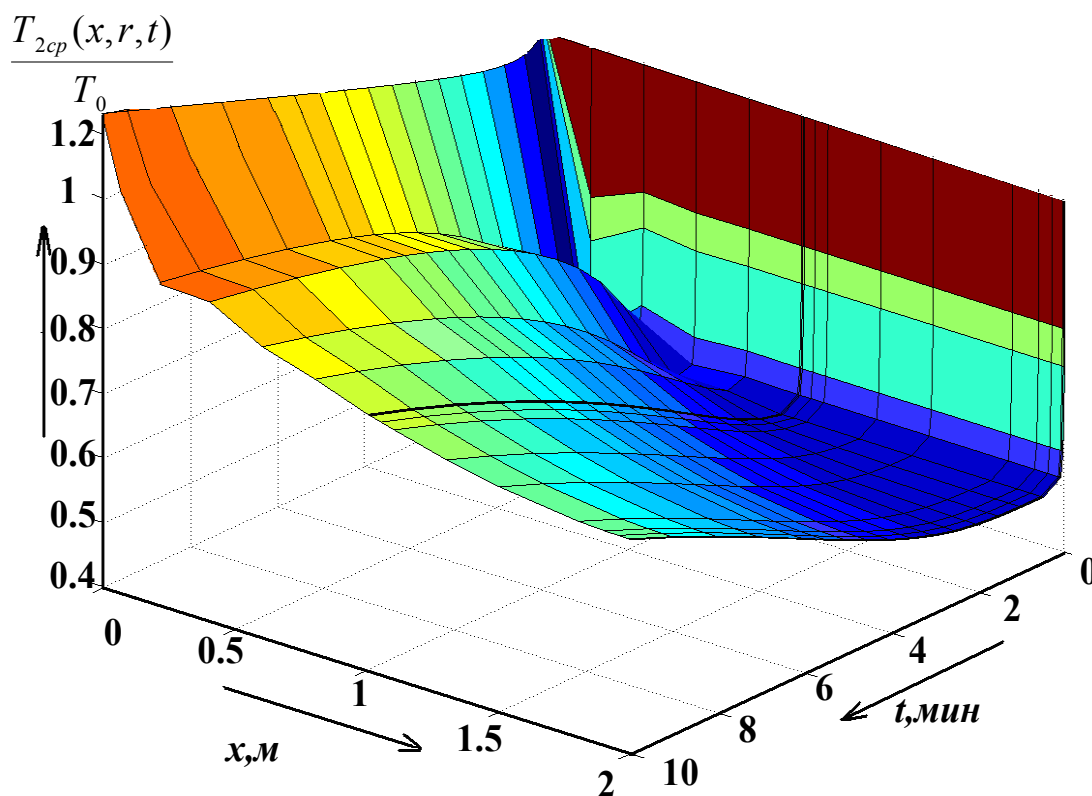


Рис. 1. Распределение температуры расплава по глубине ковша при $R = \frac{2}{3} R_{ковша}$

ВЫВОДЫ

Получена математическая модель тепловых параметров восстановительного периода плавки технологического комплекса «Печь-Ковш», которая учитывает изменяющиеся в процессе плавки подводимую от электрической дуги мощность и технологические параметры процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский А. Е. Тепловая работа дуговых сталеплавильных печей / А. Е. Никольский. – М. : Металлургия, 1981. – 320 с.
2. Гитгарц Д. А. Автоматизация плавильных электропечей с применением микро-ЭВМ / Д. А. Гитгарц. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – 136 с. – (Б-ка электротермиста; Вып. 73).
3. Егоров А. И. Основы теории управления / А. И. Егоров. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 504 с.
4. Дьяков В. П. MATLAB 6/6.1/6.5 + Simulink 4/5. Основы применения. Полное руководство пользователя / В. П. Дьяков. – М. : Солон-Пресс, 2002. – 800 с.